单元 12：续概率

12.1 加法原则

教师宜用例子及范氏图的阐释，引导学生自行发现下列法则：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

学生应能运用以上法则去解决问题，包括多于两件事件的情况。

并当 A，B 为互斥时，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

12.2 条件概率

在明确界定条件概率的意义前，教师宜先取一些典型例子讨论，使学生能较易吸收和认同。

在定义 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 中，A 可看作是一个缩减了的样本空间，由此可推论出

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

<u>例一</u>

一家庭有两位小孩，已知其一为女孩。求另一位为男孩的概率。

<u>例二</u>

一盒内装有 3 个白球及 5 个红球。

(i) 现随机地由盒内抽出 1 球，抽出后不再放回盒内。若第 1 次抽出的球为白色，试求第 2 次抽出的球为红球的概率。

(ii) 现随机地由盒内抽出 1 球，抽出后再放回盒内。若首 2 次抽出的球皆为白色，试求第 3 次抽出的球为白球的概率。

例三

一信用咭公司调查大学生的新户口情况。若抽取 160 名学生为样本，查询他们是否拥有信用咭 X 或信用咭 Y，结果如下：

	信用咭 X	
信用咭 Y	有	没有
有	50	20
没有	30	60

设　事件 A =拥有两款信用咭的学生，
　　事件 B =最少拥有一款信用咭的学生，
　　事件 C =没有任何信用咭的学生，
　　事件 D =拥有信用咭 X 的学生，
　　事件 E =拥有信用咭 Y 的学生。

求事件 A，B，C，D，E，$A\cup B$，$A\cap B$ 分别发生的概率。同时求 $P(A|E)$ 及 $P(A|D)$。

独立条件

若以下任何一条件满足时，A 及 B 可被视为独立事件：

(i) $P(A|B)=P(A)$

(ii) $P(B|A)=P(B)$

(iii) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

设 A'、B' 分别代表 A、B 的互补事件，而当 A 及 B 是独立事件，则 A' 及 B 、 B' 及 A 、 A' 及 B' 都是互为独立事件。

例四

掷一公正的硬币 3 次。

若　事件 A =正面在第 1 次出现，
　　事件 B =正面在第 2 次出现，
　　事件 C =正面在 3 次投掷中皆出现，

求 A 及 B，B 及 C，C 及 A 是否互相独立。

12.3 贝叶斯定理

贝叶斯定理指出，若 $B_1, B_2, \ldots$ 均为互斥彻底事件时则

$$P(B_r\,|\,A)=\frac{P(A\cap B_r)}{\sum_i P(A\cap B_i)}=\frac{P(A\,|\,B_r)P(B_r)}{\sum_i P(A\,|\,B_i)P(B_i)}$$

教师在介绍贝叶斯定理之前，应带领学生运用条件概率的定义和树形图得出这定理。学生无须强记这公式。

例一

设这里有大小相同的盒子 3 个，里面装着不同数目的白球及黑球。

	白球	黑球
第 1 个盒	8	3
第 2 个盒	6	5
第 3 个盒	4	7

随机地选取一盒子，从中随机地取出 1 球。

(i) 求抽出白球的概率。

(ii) 若抽出的球为白球，求它是从第 1 个盒子抽出来的概率。

例二

一汽水生产公司的市场经理计划介绍一新品种可乐到市场去。根据以往经验，该公司所生产的可乐成功推广的概率为 30%，而失败的概率为 70%。在新品种可乐推广到市场前，公司先作市场调查，收集受欢迎或不受欢迎的报告。根据过往经验，80% 成功推广的可乐能得到受欢迎的报告，而 40% 失败推广的可乐亦会得到受欢迎的报告。市场经理希望找出，若新品种可乐已得到一受欢迎的报告，它成功推广的概率为何 ?

例三

一男子决定去北角探访亲友，可以选择三种交通工具：地铁、公共巴士、电车。以下是一些数据：

	乘搭该交通工具的概率	迟到的概率
地铁	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$
公共巴士	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{9}$
电车	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

(i) 已知他迟到，求他乘搭地铁的概率。

(ii) 已知他没有迟到，求他乘搭公共巴士的概率。