單元 8：不定積分法

8.1 不定積分法

教師可利用簡單的代數式如 $2x$ 及 x^2 去引出若 $F'(x)=f(x)$ 則 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函數這概念，並鼓勵學生找出 $2x$ 的另一些原函數，從而了解求某函數的原函數是微分法的逆運算。但是，該運算程序所產生的原函數並不是唯一的，而是一組只相差一個常數項的函數。教師可利用圖像幫助學生領略這概念。

<u>例一</u>

設 $f(x)=3x^2+1$，$G(x)=x^3+x+1$，$F(x)=x^3+x+9$，則很容易就看出 $F'(x)=f(x)$ 且 $G'(x)=f(x)$。

求出某函數的原函數，這個程序稱為不定積分法。

教師這時可介紹關係式 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ ，並應強調積分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 只是一個記號，積分符號 $\int$ 表示對函數 $f(x)$ 作出積分運算；$\mathrm{d}x$ 則凸顯該運算是對應變量 x 而作出的，而 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 並不表示 $f(x)$ 乘以 $\mathrm{d}x$。

學生應學會求不定積分的導數，同時驗算其答案是否準確。教師應用例子去討論怎樣求得不定積分的常數 C。C 的意義亦應詳加解釋。

8.2 一些不定積分法的公式

學生應能以微分法的逆運算去求不定積分，及能掌握以下積分定理：

(i) $\int k\,\mathrm{d}x=kx+C$，　k 為常數；

(ii) $\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$，　$n\neq -1$;

(iii) $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$，　$x\neq 0$;

(iv) $\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$，

(v) $\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$，　k 為常數；

(vi) $\int [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int g(x)\,\mathrm{d}x$

例一

在奧運會開幕前的 16 天，一電視台擬進行一推廣活動以增加體育台的收視人數 $N(t)$。設在推廣活動舉行前，電視台有 300,000 位觀眾。電視台管理層預期觀眾人數的增加率為 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=100(32-2t)$，其中 $0\le t\le 16$。求推廣活動舉行後，觀看奧運會開幕儀式的人數。學生應學會利用 $t = 0$、$N = 300{,}000$這個資料去求原函數。

8.3 代換積分法

在講解本課題時，教師可運用一些如下的例子作為引入：

$\int(2x+1)^5\,\mathrm{d}x$，$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$。

教師應指出，採用不同的代換去求不定積分可得出表面上不同的結果，不過只是常數項的差異而已。例如：

$$\int(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{(x+1)^2}{2}+C_1,$$

$$\int(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x+C_2。$$

至於分部積分法則不在本課程範圍內。