單元 2：二項展式

2.1 當 n 為正整數時 $(1+x)^n$ 的展式 $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r$

這公式讓學生不用進行實際的乘法而能寫下展式。不用介紹展式的形式化證明，亦無須提及最大項與係數間的關係。二項展式的性質應包括：

(i) 展式共有 $n+1$ 項；
(ii) 二項係數 C_r^n 全是整數。

應研究帕斯卡三角形與展式中係數 C_r^n 的關係。

學生須學會

$$\sum_{r=1}^{n}(ax_r \pm by_r)=a\sum_{r=1}^{n}x_r \pm b\sum_{r=1}^{n}y_r$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(x_r \pm y_r\right)^2=\sum_{r=1}^{n}x_r{}^2 \pm 2\sum_{r=1}^{n}x_r y_r+\sum_{r=1}^{n}y_r{}^2$$

<u>例一</u>
用三項展式去求 $(1.01)^{10}$ 的約數值。

<u>例二</u>
可重複運用二項展式求得多項展式。

<u>例三</u>
可應用二項展式解決概率問題 (單元 13)。

<u>例四</u>
自然對數的底 e (單元 3) 是由二項展式算得。

<u>例五</u>
統計常態分佈的公式 (單元 14) 也是由二項展式算得。

2.2 當 n 為非正整數且 $|x|<1$ 時 $(1+x)^n$ 的展式

學生應學習展式通項，即第 $(r+1)$ 項係數 $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 的變化。
當 n 為一正整數及 r 這 $n+1$，係數等於零。
當 n 為一非正整數，係數永不等於零。

在後者的情況下，展式為

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots \quad -1<x<1$$

為使學生明瞭這無窮級數只在 $-1 < x < 1$ 時成立，教師可用以下例子講解：

考慮展式

$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^r + \cdots.$

代入 $x = -1$，可得

右方 $= \begin{cases} 0\text{，項數為雙數} \\ 1\text{，項數為單數} \end{cases}$

odd num

但左方 $= [1-(-1)]^{-1} = \dfrac{1}{2}$

教師應教授絕對值的定義，及與學生討論收斂性和發散性的直觀意義。

學生應學習展開一些當 n 為非正整數的二項式，如

(i) $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2!}x^2 + \dfrac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}x^3 + \cdots$

(ii) $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

學生應能以升冪將展式如 $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2}$ 展開至某個指定的項數。

<u>例一</u>

二項展式應用於求某些數式的近似值。

<u>例二</u>

二項展式可應用於學習指數級數 (單元 3)。

<u>例三</u>

可利用二項展式求得一個指定項數的多項式，從而求出有理函數如 $\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^2}$ 在某指定 x 值範圍內的近似值。