单元 14：正态分布和应用

14.1 正态分布

重温连续型的随机变量，例如：

(i) 成年人的高度和重量

(ii) 相同种类的植物所生之叶的长度和阔度

(iii) 一位丙组学生数次跳远的距离

(iv) 一组丙组学生跳远的距离

(v) 在超级市场售卖标示为 5 公斤米的实际重量

对于以上的例子，若所取的样本很大，如 1,000 或 10,000，数据分布会呈钟形，及大约随着正态分布，其概率函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

其中 μ 为分布之平均值，σ^2 为分布之方差。

须讲授符号 $N(\mu, \sigma^2)$。

当 $\mu = 0$，$\sigma = 1$ 时，$N(0, 1)$ 叫做标准正态分布，其概率函数为：

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$

14.2 正态曲线和标准正态曲线

下图显示不同的 μ 和不同 σ^2 值时正态分布图形的变化。

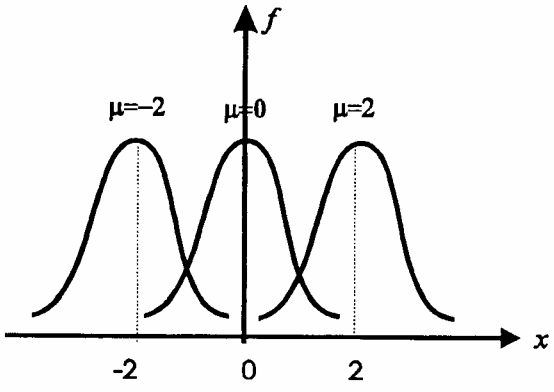

图 14.2(i)
正态分布：σ 为固定 ($\sigma = 1$)

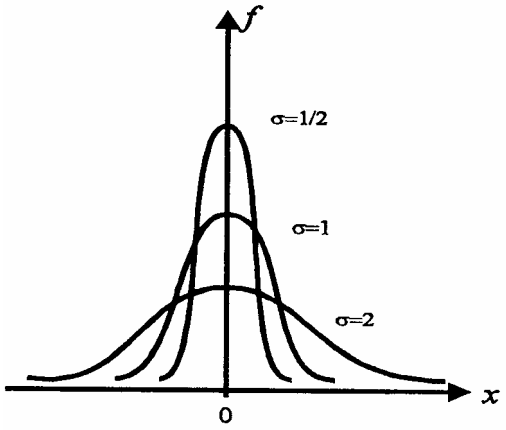

图 14.2(ii)
正态分布：μ 为固定 ($\mu = 0$)

下列为正态分布曲线的特点：

(i) 曲线为钟形，并对称于平均值；

(ii) 平均值、中位数和众数均为等值；

(iii) 曲线的平坦程度取决于 σ 值；

(iv) 曲线下的面积为 1。

标准正态曲线

利用转换公式 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 可将正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 转为标准正态分布 $N(0,\ 1)$，其中 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 及 $Z \sim N(0,\ 1)$。

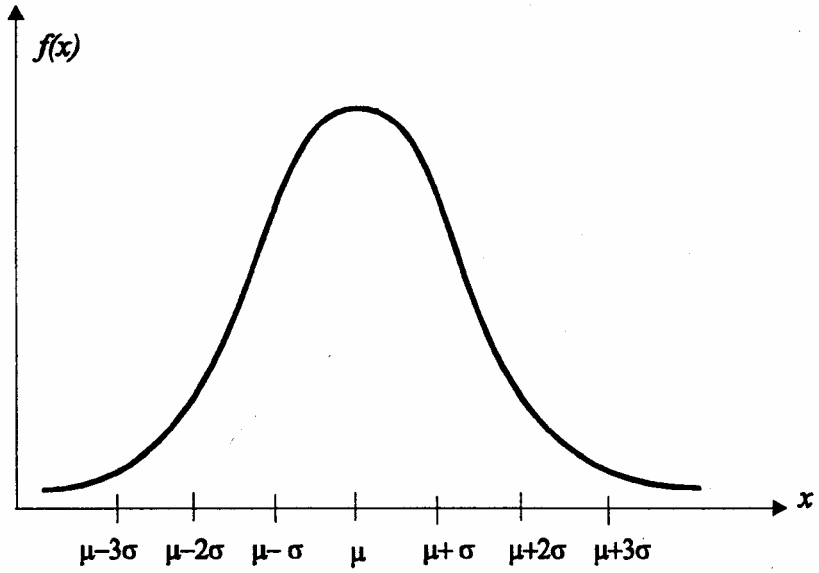

图 14.2(iii)
正态曲线

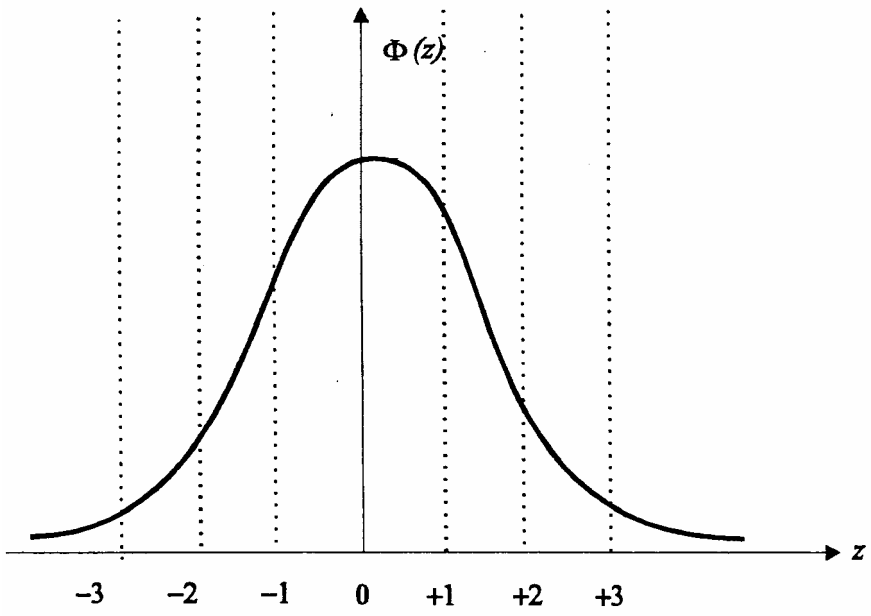

图 14.2(iv)
标准正态曲线

14.3 正态表

学生应知可透过下列公式，求取标准正态曲线下的面积之值：

$$A(z) = P(0 < Z < z)$$
$$= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \, dt$$

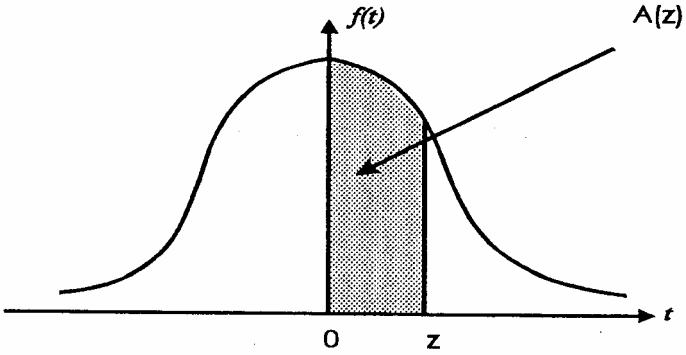

图 14.3 (i)

可由标准正态分布表查得。

学生须懂得运用这数表去查核一些如：$P(Z > a)$、$P(Z < a)$、$P(Z \le b)$、$P(a \le Z \le b)$ 等之值，以便解决实际问题。此外，教师亦应特别强调，必须首先将 $N(\mu, \sigma^2)$ 化为 $N(0, 1)$，始能查阅数表。

当 $P(Z > a) = \alpha$，或 $P(Z < b) = \alpha$，其中 α 为已知值，学生应懂得如何求 α 及 b 的值。

利用标准正态变量 Z 去找出 $N(\mu, \sigma^2)$的概率。

学生应学会解下列问题的方法。已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(i) 若 $\sigma^2 = 16$ 及 $P(X > 120) = 0.05$，求 μ 的值。

(ii) 若 $\mu = 20$ 及 $P(15 \le X \le 25) = 0.99$，求 σ 的值。

(iii) 若 $P(X > -10) = 0.72$ 及 $P(X < 0) = 0.90$，求 μ 及 σ 的值。

14.4 正态分布的应用

<u>例一</u>

己知一学生每日逗留在课室的时间以正态分布，设 μ 为 6 小时，σ 为 $\frac{1}{10}$ 小时，求该学生逗留在课室少于 5 小时的概率。

<u>例二</u>

一工厂运用模式 A 或模式 B 去制造电视机。由模式 A 生产出来的电视机寿命 依据正态分布，$\mu = 86{,}000$ 小时，$\sigma = 83000$ 小时；模式 B 生产出来的电视机寿命亦依据王态分布，$\mu = 75{,}000$ 小时，$\sigma = 6{,}000$ 小时。电视机平均寿命低于 30,000 小时则属次品。那种模式生产出来的电视机较为可取 ?

例三

一工厂生产 1.5 公升的樽装苹果汁产品。但是，由于生产过程的随机变动，苹果汁的实际体积呈正态分布。据观察所得，有 10% 的产品其苹果汁的体积少于 1.45 公升，而 5% 的产品其苹果汁的体积则多于 1.55 公升。试计算苹果汁体积的平均值与标准差。

例四

设二人家庭于香港每月的食品支出依据正态分布，μ = \$6,000，σ = \$300。

(i) 家庭每月食品支出少于 \$5,500 的概率为何 ?

(ii) 家庭每月食品支出在 \$5,500 至 \$7,000 之间的概率为何 ?

(iii) 家庭每月食品支出少于 \$5,500 或多于 \$7,000 的概率为何 ?

(iv) 找出下四分位数 Q_1 及上四分位数 Q_3 的值。

(v) 试写一报告说明你求得的结果。