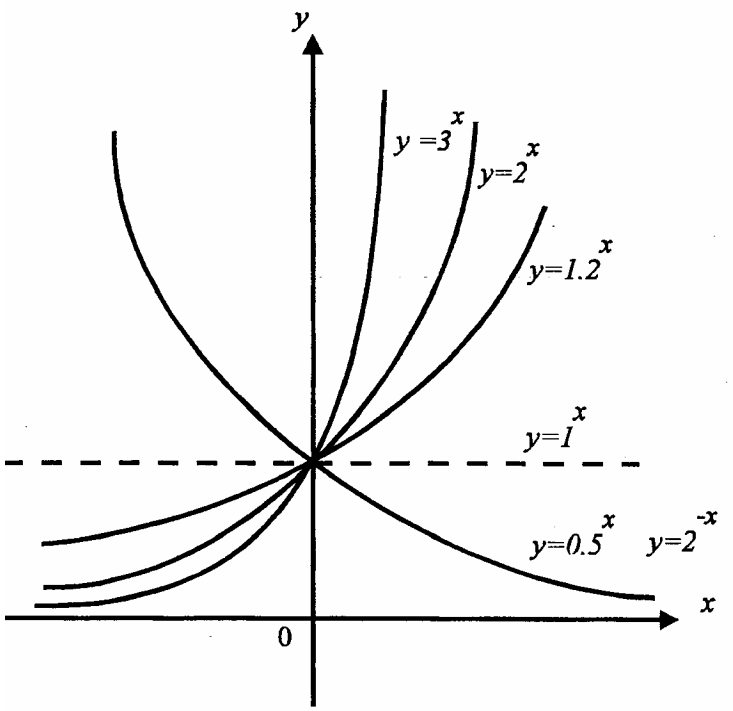
單元 3：指數函數

3.1 指數函數 $f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的性質和圖像

教師可著學生描繪 $y=2^x$ $(-3\le x\le 5)$ 的圖像。這種函數的指數為變量，稱為指數函數。學生應可辨別 $f(x)=x^2$ 和 $f(x)=2^x$ 的圖像在形狀上不同之處。

下圖為 a 取不同正值時函數 $y=a^x$ 的圖像：



從以上圖像，學生可了解：(i) $y=a^x$ ($a>1$), 及 (ii) $y=a^x$ ($0<a<1$) 的一般形狀。他們應能發現每幅圖像皆在 x-軸以上及與 y-軸的交點為 (0, 1)。

特別留意，當 $a=e$，而 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}+\cdots+\frac{1^r}{r!}+\cdots\approx 2.71828$ 時，

$y=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots$ 稱為指數級數。

可與學生溫習以下指數定律：

(i) $a^x>0$, x 為實數

(ii) $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$

(iii) $a^p\div a^q=a^{p-q}$

(iv) $(a^p)^q=a^{pq}$

(v) $a^0=1$

在自然現象中，很多規律都滿足指數函數的性質，例如人口增長、細菌繁殖、物質的冷卻率、物體的熱能散失、物質增長及衰變、統計學的函數等。這些規律都可以用指數函數 $y = a^x$ 表示。

現代統計學中，幾乎每個重要的概率分配函數，用微積分計算時，都以 e 的指數函數為重點，以後再詳論。

指數函數 $y = a^x$ $(a > 1)$ 與投資在恆利率的複利息相似：

$$A(n) = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

T這增長可稱為複利息定律 (C.I.L.)。指數函數在科學和科技上非常重要，因為許多現象都依從複利息定律。人口增長、細菌數目的增長，亦依從這定律。

另外還有物質衰變定律：

$$y = ak^{-bx}$$

在任意給定時刻中，數量減少的率與量成正比。

放射性元素的衰變指數便是一個很好的例子：

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

學生學習了微分法之後，教師可提及 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$，這是認識指數函數性質的好例子。

3.2 簡易指數方程的解法

學生應知道如何解簡易指數方程，如

(i) $3^{2x} = 27^{x+1}$

(ii) $2^{2x} + 5(2^x) - 14 = 0$