單元 14：正態分佈和應用

14.1 正態分佈

重溫連續型的隨機變量，例如：

(i) 成年人的高度和重量

(ii) 相同種類的植物所生之葉的長度和闊度

(iii) 一位丙組學生數次跳遠的距離

(iv) 一組丙組學生跳遠的距離

(v) 在超級市場售賣標示爲 5 公斤米的實際重量

對於以上的例子，若所取的樣本很大，如 1,000 或 10,000，數據分佈會呈鐘形，及大約隨著正態分佈，其概率函數爲：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

其中 μ 爲分佈之平均值，σ^2 爲分佈之方差。

須講授符號 $N(\mu, \sigma^2)$。

當 $\mu = 0$，$\sigma = 1$ 時，$N(0, 1)$ 叫做標準正態分佈，其概率函數爲：

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$

14.2 正態曲綫和標準正態曲綫

下圖顯示不同的 μ 和不同 σ^2 值時正態分佈圖形的變化。

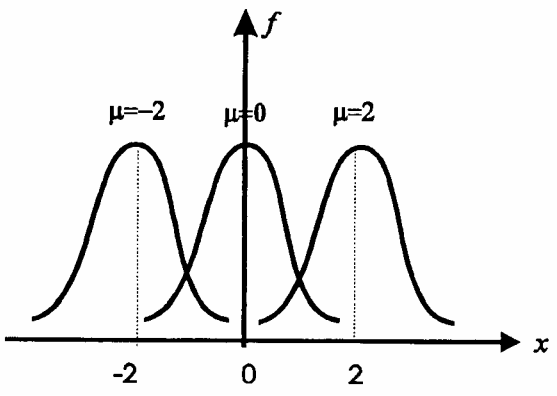

圖 14.2(i)
正態分佈：σ 爲固定 ($\sigma = 1$)

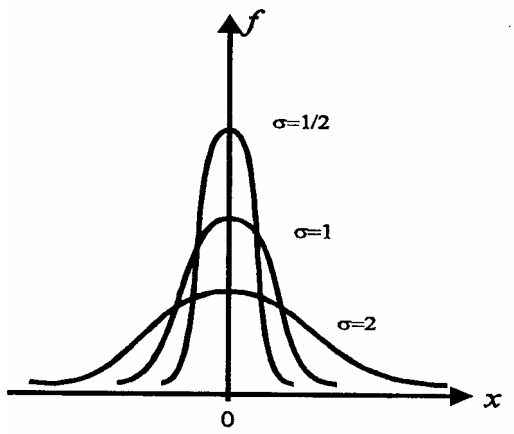

圖 14.2(ii)
正態分佈：μ 爲固定 ($\mu = 0$)

下列爲正態分佈曲綫的特點：

(i) 曲綫爲鐘形，並對稱於平均值；

(ii) 平均值、中位數和眾數均爲等值；

(iii) 曲綫的平坦程度取決於 σ 值；

(iv) 曲綫下的面積爲 1。

標準正態曲綫

利用轉換公式 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 可將正態分佈 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 轉爲標準正態分佈 $N(0,\ 1)$，其中 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 及 $Z \sim N(0,\ 1)$。

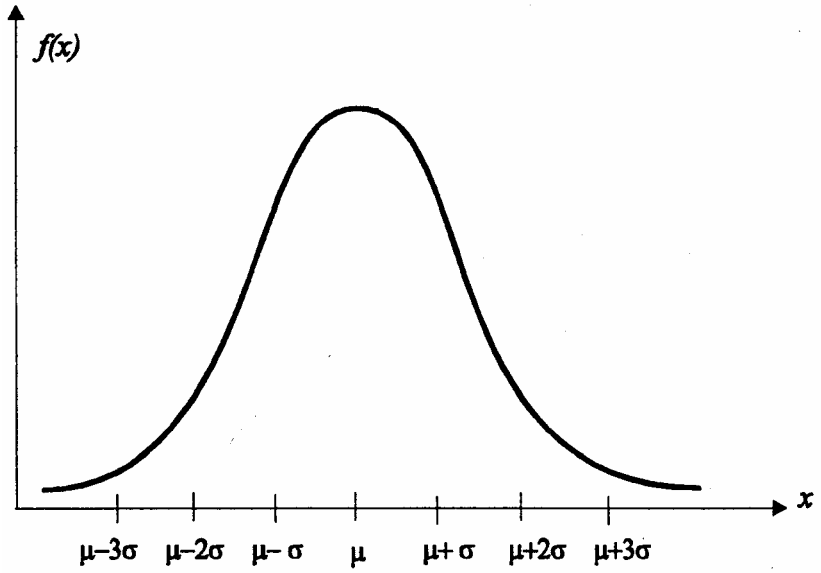

圖 14.2(iii)
正態曲綫

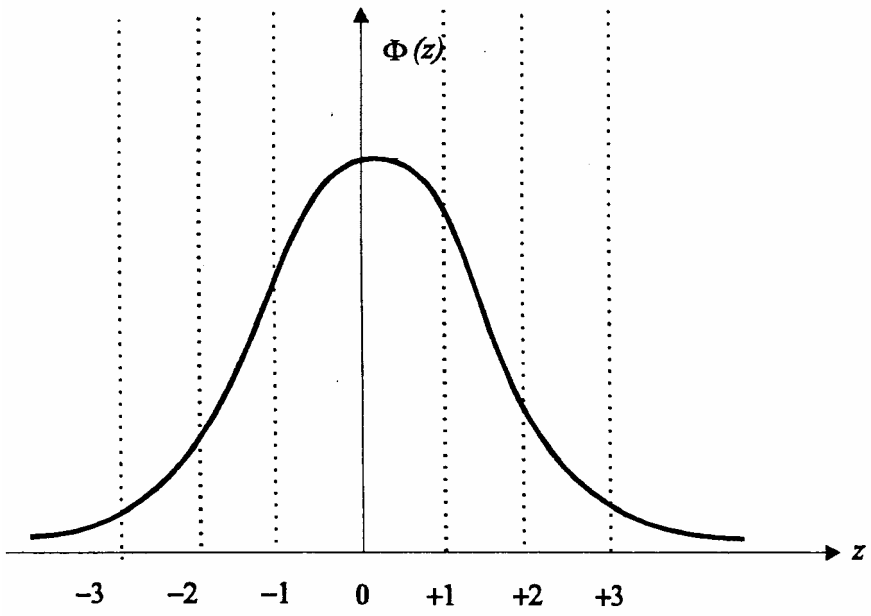

圖 14.2(iv)
標準正態曲綫

14.3 正態表

學生應知可透過下列公式，求取標準正態曲綫下的面積之值：

$$A(z) = P(0 < Z < z)$$
$$= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \, dt$$

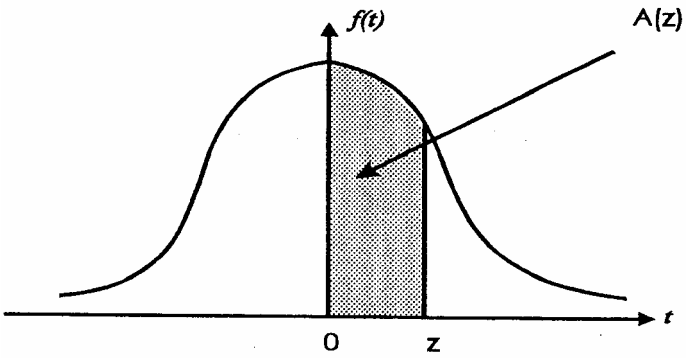

圖 14.3 (i)

可由標準正態分佈表查得。

學生須懂得運用這數表去查核一些如：$P(Z > a)$、$P(Z < a)$、$P(Z \le b)$、$P(a \le Z \le b)$ 等之值，以便解決實際問題。此外，教師亦應特別強調，必須首先將 $N(\mu, \sigma^2)$ 化爲 $N(0, 1)$，始能查閱數表。

當 $P(Z > a) = \alpha$，或 $P(Z < b) = \alpha$，其中 α 爲已知值，學生應懂得如何求 α 及 b 的值。

利用標準正態變數 Z 去找出 $N(\mu, \sigma^2)$的概率。

學生應學會解下列問題的方法。已知隨機變量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(i) 若 $\sigma^2 = 16$ 及 $P(X > 120) = 0.05$，求 μ 的值。

(ii) 若 $\mu = 20$ 及 $P(15 \le X \le 25) = 0.99$，求 σ 的值。

(iii) 若 $P(X > -10) = 0.72$ 及 $P(X < 0) = 0.90$，求 μ 及 σ 的值。

14.4 正態分佈的應用

<u>例一</u>

已知一學生每日逗留在課室的時間以正態分佈，設 μ 爲 6 小時，σ 爲 $\frac{1}{10}$ 小時，求該學生逗留在課室少於 5 小時的概率。

<u>例二</u>

一工廠運用模式 A 或模式 B 去製造電視機。由模式 A 生產出來的電視機壽命 依據正態分佈，$\mu = 86{,}000$ 小時，$\sigma = 83000$ 小時；模式 B 生產出來的電視機壽命亦依據王態分佈，$\mu = 75{,}000$ 小時，$\sigma = 6{,}000$ 小時。電視機平均壽命低於 30,000 小時則屬次品。那種模式生產出來的電視機較爲可取 ?

例三

一工廠生產 1.5 公升的樽裝蘋果汁產品。但是，由於生產過程的隨機變動，蘋果汁的實際體積呈正態分佈。據觀察所得，有 10% 的產品其蘋果汁的體積少於 1.45 公升，而 5% 的產品其蘋果汁的體積則多於 1.55 公升。試計算蘋果汁體積的平均值與標準差。

例四

設二人家庭於香港每月的食品支出依據正態分佈，μ = \$6,000，σ = \$300。

(i) 家庭每月食品支出少於 \$5,500 的概率爲何 ?

(ii) 家庭每月食品支出在 \$5,500 至 \$7,000 之間的概率爲何 ?

(iii) 家庭每月食品支出少於 \$5,500 或多於 \$7,000 的概率爲何 ?

(iv) 找出下四分位數 Q_1 及上四分位數 Q_3 的值。

(v) 試寫一報告說明你求得的結果。