單元 6：微分法

6.1 基本微分法法則

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k=0$， k 為常數

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}$， n 為實數 (冪法則)

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[kf(x)\right]=k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$， k 為常數

(iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\pm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$ (和、差法則)

(v) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right]=g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)+f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$ (積法則)

(vi) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)-f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)}{g^2(x)}$， 其中 $g(x)\neq 0$ (商法則)

無須證明法則。

6.2 複合函數和逆函數的微分法

教師應用例子幫助學生掌握複合函數、逆函數、顯函數及隱函數的基本概念。
可將複合函數看成某函數值的函數。

<u>例一</u>

儲存於倉庫的 n 箱蘑菇 t 日後的腐壞數目以函數 $n(t)=2t-\frac{1}{8}t^2$ 表示，其中 $0\leq t\leq 8$。種植 n 箱蘑菇的成本 C 以函數 $C(n) = 20 + 30n$ 表示。因蘑菇腐壞而需棄掉所帶來的損失可看作複合函數。

逆函數可看作是應變量與自變量的角色改變。函數 $y=f(x)$ 的逆函數的記號是 $x=f^{-1}(y)$, 其中 f^{-1} 代表逆函數而不是 $\frac{1}{f}$。一個明顯例子是 e^x 乃 $\ln x$ 的逆函數，反之亦然。教師可向能力較高的學生說明逆函數的存在條件。

教師應介紹鏈式法則 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 及逆函數法則 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$ 以求複合函數及逆函數的導數, 但無須給予詳盡證明, 只需提供充分的應用題以作示範。

學生應學懂如何分辨顯函數與隱函數。

例二

一半徑為 y cm、高度為 x cm 的圓柱體，總表面面積為 24π cm^2。半徑與高度的隱性表示式為 $y^2+xy-12=0$。通過解方程，我們求得函數 y 的顯性表示式 $y=\dfrac{-x+\sqrt{x^2+48}}{2}$。

在介紹隱函數的微分法前，教師應舉出一些不容易或不可能將 y 以 x 顯性形式表示的方程 $f(x,y)=0$，例如：$x^5-x^3y+y^3-y^4+1=0$。

例三

設某貨品的需求數量 x 件與價錢 $\$P$ 的關係式為 $x^2+5xP+25P^2=4500$。從這個例子，很容易看到隱函數微分法的方便之處。

學生應懂得採用鏈式法則、逆函數法則及隱函數微分法去解決涉及簡單指數函數和對數函數的問題。但參數方程的微分法則不包括在內。

6.3 e^x 和 $\ln x$ 的微分法

將無窮級數 $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ 兩側逐項求導數，憑此可以引出這個法則 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x=e^x$。

將 $\ln x$ 視為 e^x 的逆函數，利用逆函數法則，可證明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)=\dfrac{1}{x}$。

遇上較複雜的函數，尤其是當指數包含有變數時，用對數微分法求導數會較容易。例子包括求 $y=\dfrac{\sqrt{2x-3}e^{-3x}}{(4x+5)^2}$，$y=e^{x^2}$，$y=\log_a\sqrt{x+1}$ 及 $y=x^x$ 的導數。

學生應能利用鏈式法則演繹出以下公式：

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{f(x)}=e^{f(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

函數如 xe^{x^2+1} 及 $\ln\sqrt{3x^2-5x+7}$ 類型的微分法應包括在需要演繹之列，但三角函數的微分法則並不需要。

6.4 二階導數

學生應學習記號 $f''(x)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 的意義，教師應強調 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\neq\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}}$。至於高階導數並不在課程之內。