單元 9：定積分法

9.1 定積分

定積分可被定義爲一和數的極限。向學生介紹 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 時宜採用直觀的手法。

教師應清楚解釋定積分與不定積分不同的地方。定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一實數，不定積分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 則是 $f(x)$ 的反導數。

<u>例一</u>

設一公司每月生產 x 部電視機，其邊際利潤 $\$P(x)$ 爲 $\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = 165 - 0.1x$，$0 \le x \le 4000$。

該公司現今每月生產 1,600 部電視機，計畫增加產量。若產量由 1,600 部增加 至 2,000 部，求這間公司的利潤改變。

9.2 定積分的性質

教師應列舉足夠的例子去說明定積分以下的性質：

(i) $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(iii) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(iv) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(v) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

(vi) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

教師應提醒學生，當使用換元法演算積分時，積分的上、下限應作出相應的變換。

9.3 平面圓形面積及其應用

學生應能掌握定積分和曲邊梯形面積的關係，並注意到負面積和負值的定積分是兩回事。教師可利用日常生活例子向學生講解各種情況。

學生可直接運用這些知識計算曲綫 $y = f(x)$ 與 x-軸，曲綫 $x = g(y)$ 與 y-軸及兩曲綫所圍成的面積。教師可繪畫有關曲綫的圖形，以幫助學生思考。

教師宜鼓勵學生養成習慣，計算時繪畫有關圖形，得出所求面積的概況，如此便容易找出有關的界限及求面積的方法。

<u>例一</u>

一所電力公司計畫於一大都會的外圍建一核電廠。爲了要令到公眾安心，該公司估計，假使核電廠發生意外，引致大都會有人死亡，死亡人數的函數是 $r(t) = 20000e^{-0.2t}$，其中 $r(t)$ 代表每天的死亡人數及 t 代表意外發生後的日數：

(i) 若有事故發生，求 2 日後的死亡人數。
(ii) 若有事故發生，求第 2 日至第 7 日期間的死亡人數。
(iii) 若有事故發生，求 7 日後的死亡人數。
(iv) 若有事故發生，要多少天才令到大都會所有人因這次意外死去 ?

<u>例二</u>

一郵遞傳銷公司開始推廣活動。廣告費每天估計爲 \$5,950。市場專家估計，公司利潤 (不包括廣告支出) 隨著推廣活動的時間而遞減，其中純利潤函數 $f(t) = -50t^2 + 10000$ 代表該推廣活動開始 t 日後每夫所得的利潤。該推廣活動會持續，直至廣告費超越純利潤爲止。

(i) 問推廣活動應進行多久 ?
(ii) 求該段期間廣告費總支出。
(iii) 求該段期間撤除廣告費後的利潤總額。
(iv) 求預期的純利潤。
(v) 設廣告支出改爲每日 \$5,000 及利潤函數變爲 $f(t) = -10t^2 + 9000$，求純利潤值。

9.4 利用梯形法則計算定積分的近似值

有些積分很難用計算方法求得答案 (例如：$\int_1^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$)，因此有必要估計積分值。 梯形法則是求數值積分的一種方法，可求得定積分的近似值。

梯形法則的定義及公式應以實例說明。

教師應當指出，若曲綫向上凸時，梯形法則會低估圖形的面積 (例如：$y=-x^2+4$)，反之則會高估 (例如：$y=x^2+4$)。對誤差估值不在本課程之內。

教師可清楚說明，梯形數目越多，所得的答案越準確。

<u>例一</u>

利用梯形法則及二個等距、四個等距和八個等距，去估計 $\int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x$。答案準確至 4 位有效數字。用那個等距計算出來的問答較準確 ?

<u>例二</u>

下表爲火車的車速 (t 是進行時間，v 是速率)。試繪火車的速率與時間圖。利用梯形法則，計算 t = 0 至 t = 0.4 所行的總距離。

t (h)	0	0.1	0.2	0.3	0.4
v (km/h)	10	15	23	42	58

<u>例三</u>

設 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$，其中 $0\le x\le 1$ 及 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

(i) 利用梯形法則及將積分區分成 5 個子區間，求 I 的估計量 I_1。
(ii) 求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$。
(iii) 利用 (ii) 或其他方法，指出 (i) 中的 I_1 對 I 而言是一高估計量還是一低估計量，並簡單解釋答案。