单元 5：极限和导数

5.1 函数的极限

在本节内，教师可以用直观的方法介绍函数的概念、记法及极限。介绍极限的概念时，可以用手提电话电池的再充电，粒子的加速度极限、细菌的繁殖来作为例子。教师可用列表及绘图方式列出无穷小的变化，以显示当 x 趋向数值 a 时，$f(x)$ 极限的意义，这个极限可记作 $\lim_{x\to a} f(x)=L$。

教师应避免引入 ε - δ 的概念。可运用计算机帮助学生领略有关的概念。学生应能了解，当 x 趋向 a 时，$f(x)\to\pm\infty$ 没有极限存在。

教师应与学生讨论一些极限存在和不存在的例子，如 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ 及 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{|x-5|}$。学生应能发现，纵使 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ 存在，但函数 $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ 在点 $x=5$ 是没有定义的。教师亦应同时提及当 x 趋向 $\pm\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限。

有关三角函数的极限不在本课程内。

在讲授极限的定理时，教师只陈述下列各点而无须给予证明：有关函数的和、差、积、商的极限，纯量乘法及复合函数的极限。学生只需掌握函数极限概念，以便日后学习函数导数的概念。

教师可与学生讨论当 h 趋向 0 时，$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的极限值，以便引入微分法的概念。

<u>例一</u>

设充电的电池能量（焦耳）以函数 $E(t)=10\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)$ 表示，其中 t（小时）表示充电时间。求电池于充电 1 小时，2 小时及 4 小时后的能量。求电池的最终能量水平。

5.2 函数的导数

教师应介绍函数导数的常用记号如 $f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y'$，$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ 等。教师应强调，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是一个符号而不是一个分数同时应示范如何从基本原理去求下列函数的导数：

x^4；$\sqrt{x+1}$；$x^2(x+2)$ 及 $\frac{1}{x-1}$。

学生应能掌握求简单函数的导数的方法。再者，学生亦须知道 $f'(x)$ 与 $f'(a)$ 的分别，其中 a 为一定值。